CONCOURS ESTP - ENSAM

Durée : 3 heures

d'admission à :

L'ÉCOLE SPÉCIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE D'ARTS ET MÉTIERS

- Banque de notes ECRIN et ISEP -

Les six sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.

Dans cette épreuve ***comme dans toutes celles qui suivront****, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.*

---

1) a) Calculer le développement en série entière de $(1-t)^{-3}$.

b) Soit n un entier naturel. Calculer le coefficient de X^p dans le polynôme $(1+X+X^2+\cdots X^n)^3$ pour $0 \leqslant p \leqslant n$.

---

2) Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E avec $n \geqslant 1$; les coordonnées d'un vecteur x de E relatives à cette base seront notées $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

a) Démontrer l'inégalité $\sqrt{2(u^2+v^2)} \leqslant u+v+|u-v|$ où u et v sont des réels positifs.

b) On pose $N(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ et $M(x) = |\sum_{i=1}^{n} x_i|$. Sous quelles conditions N et M sont-elles des normes ?

c) Déterminer les bornes inférieures et supérieures des expressions $\frac{N(x)}{\|x\|}$, $\frac{M(x)}{\|x\|}$ et $\frac{N(x)+M(x)}{\|x\|}$ lorsque x décrit E privé de $\{0\}$ (on dira dans chaque cas si ces bornes sont effectivement atteintes en explicitant éventuellement des vecteurs qui conviennent).

3) Soit A la matrice réelle d'ordre n dont tous les éléments sont égaux à 1, sauf les éléments diagonaux qui sont nuls (il pourra être utile d'introduire la matrice $E = A + I_n$).

a) Calculer le déterminant, le polynôme caractéristique, les valeurs propres et l'inverse de A.

b) Calculer les puissances E^k entières de E ($k \in \mathbb{N}$), et en déduire celles de A et l'exponentielle de A.

---

4) Simplifier l'écriture des deux nombres réels définis par $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} - \sqrt[3]{-7+5\sqrt{2}}$ et $\sqrt[3]{\frac{13+5\sqrt{17}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-13+5\sqrt{17}}{2}}$.

(*Nota Bene* : on poura rechercher, pour chaque cas, une équation du troisième degré vérifiée par ce nombre).

---

5) Soient deux cercles C de rayon 1 et Γ de rayon r, respectivement centrés aux points de coordonnées $(1,0)$ et $(-r,0)$ dans un repère orthonormé.

a) Calculer une équation de la tangente à C au point M de coordonnées $(1+\cos\varphi, \sin\varphi)$.

b) Écrire une condition nécessaire et suffisante portant sur r et φ pour que cette droite soit tangente à Γ; calculer l'abscisse du point P de contact.

c) Déterminer le lieu du milieu du segment MP lorsque r décrit $\mathbb{R}_+^*$ et justifier géométriquement le résultat obtenu.

---

6) Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 où $\wedge$ représente le produit vectoriel. Soient quatre vecteurs a, b, c, d de E tels que a et b soient indépendants, c est orthogonal à a et d orthogonal à b. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c et d pour qu'il existe au moins un vecteur v tel que $a \wedge v = c$ et $b \wedge v = d$; montrer qu'alors v est unique.

(*Nota Bene* : calculer de deux manières différentes le déterminant de la famille (a,b,v), et admettre que l'équation $a \wedge v = c$ possède, puisque a et c sont orthogonaux, au moins une solution w).